

Научная статья

УДК 517.98

DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-144-155

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ РАЗНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО ТИПА МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

Микаел Артурович Хачатурян

Российско – Армянский Университет, 0051, Ереван, Армения

Vmware INC, 0014, Ереван, Армения

khmikayel@gmail.com

Аннотация

В работе получены прямые и обратные теоремы вложения разных измерений (теоремы о следах) для функций из мульти-анизотропного пространства Соболева $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ в случае одного класса вполне правильных многогранников \mathfrak{N} .

Ключевые слова и фразы

вполне правильный многогранник, мультианизотропное пространство Соболева, след функции.

Для цитирования

Хачатурян М. А. Прямые и обратные теоремы вложения разных измерений для одного типа мультианизотропных пространств Соболева // Математические труды, 2024, Т. 27, № 2, С. 144-155. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-144-155

DIRECT AND INVERSE EMBEDDING THEOREMS IN DIFFERENT DIMENSIONS FOR ONE TYPE OF MULTIANISOTROPIC SOBOLEV SPACES

Michael A. Khachatryan

Russian-Armenian University, 0051, Erevan, Armenia

Vmware INC, 0014, Erevan, Armenia

khmikayel@gmail.com

© Хачатурян М.А., 2024

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С.144-155

Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 144-155

Abstract

In this paper, we obtain direct and inverse embedding theorems of different dimensions (trace theorems) for functions from the multianisotropic Sobolev space $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ in the case of one class of completely regular polyhedron \mathfrak{N} .

Keywords

completely regular polyhedron, multianisotropic Sobolev space, trace of a function.

For citation

Khachaturyan M. A. Direct and inverse embedding theorems in different dimensions for one type of multianisotropic Sobolev spaces // Mat. Trudy, 2024, V. 27, no. 2, pp. 144-155. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-144-155

§ 1. Введение и постановка задачи

Теория функциональных пространств, получивших в настоящее время название пространств Соболева, широко используется в теории дифференциальных уравнений в частных производных, математической физике и многочисленных приложениях [1]. В дальнейшем были введены разные обобщения пространств Соболева. Теория анизотропных пространств Соболева $W_p^{(l_1, l_2, \dots, l_n)}(\mathbb{R}^n)$ в случае $p = 2$ полностью разработано Л. Н. Слободецким [2, 3]. Слободецким также было введено обобщение таких пространств на дробные порядки, с помощью чего были получены прямые и обратные теоремы вложения разных измерений для этих пространств. При изучении некоторого класса гипоеллиптических уравнений, введенного Л. Хермандером, возникла необходимость изучения мультианизотропных функциональных пространств Соболева $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$, определяемых с помощью вполне правильного многогранника \mathfrak{N} [4] и которые являются обобщением анизотропных пространств Соболева. Впервые пространства такого типа изучались в работах С. М. Никольского и В. П. Михайлова. Исследование этих пространств было продолжено в работах Г.Г. Казаряна. Развитию теории мультианизотропных пространств посвящён цикл работ Г.А. Карапетяна [5, 6, 7, 8, 9, 10].

Данная работа является продолжением работы [11] автора, где изучаются следы функции $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ и ее обобщенных производных $D_{x_3}^s f$ ($0 \leq s < l$) на гиперплоскости $x_3 = a$ для одного частного типа мультианизотропного пространства $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$, где трехмерный вполне правильный многогранник \mathfrak{N} из себя представляет пирамиду с вершиной $(0, 0, l)$ и с основанием \mathfrak{N}_0 . В данной работе получены результаты для более общего вида вполне правильных многогранников, обобщающие результаты работы [11].

§ 2. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Пусть \mathbb{R}^n – n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, \mathbb{Z}_+ и \mathbb{Q}_+ – множества соответственно целых и рациональных неотрицательных чисел, \mathbb{Q}_+^n – множество n -мерных векторов с компонентами из \mathbb{Q}_+ , \mathbb{Z}_+^n – множество n -мерных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, 2, \dots, n$. Для $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{Z}_+$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ обозначим $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $x\xi = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k$, $\xi^t := (\xi_1^t, \xi_2^t, \dots, \xi_n^t)$, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha := D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}$, понимаемая как *обобщенная производная по С.Л. Соболеву порядка α* .

Через $S(\mathbb{R}^n)$ обозначим класс Шварца быстро убывающих на бесконечности функций. Через $F[\varphi]$ и $F^{-1}[\varphi]$ обозначим соответственно прямое и обратное преобразование Фурье функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $1 \leq k \leq n$, $x = (x', x'')$, $\xi = (\xi', \xi'')$, где $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, и $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$. Частичное преобразование Фурье функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ относительно группы переменных x' и частичное обратное преобразование Фурье функции $\psi(\xi) \in S(\mathbb{R}^n)$ относительно группы переменных ξ' будем обозначить через $F_{x'}[\varphi](\xi', x'')$ и $F_{\xi'}^{-1}[\psi](x', \xi'')$ соответственно.

Для заданного набора векторов из \mathbb{Q}_+^n через \mathfrak{N} обозначим наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки этого набора. Многогранник \mathfrak{N} называется *вполне правильным*, если он имеет вершину в начале координат и отличное от начала координат вершины на каждой оси координат, а внешние нормали всех $(n-1)$ -мерных некоординатных граней имеют положительные компоненты. Обозначим через r^k ($k = 1, 2, \dots, M$) вершины многогранника \mathfrak{N} , отличные от нуля, которые будем называть главными вершинами. Для произвольного $m \in \mathbb{Q}_+$ через $m\mathfrak{N}$ будем обозначить вполне правильный многогранник с главными вершинами mr^k ($k = 1, 2, \dots, M$).

Для заданного вполне правильного многогранника \mathfrak{N} обозначим $P_{\mathfrak{N}}(\xi) := 1 + \sum_{k=1}^M (\xi^2)^{r^k}$.

Легко проверяются следующие две леммы.

Лемма 2.1. Для произвольного n -мерного вполне правильного многогранника \mathfrak{N} и числа $q > 0$ выражения $P_{\mathfrak{N}}(\xi)^q$ и $P_{q\mathfrak{N}}(\xi)$ эквивалентны, т.е. с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$ выполняется соотношение

$$C_1 P_{\mathfrak{N}}^q(\xi) \leq P_{q\mathfrak{N}}(\xi) \leq C_2 P_{\mathfrak{N}}^q(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Лемма 2.2. Если для двух n -мерных вполне правильных многогранников \mathfrak{N} и \mathfrak{M} выполняется условие $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, то с некоторой постоянной

$C > 0$

$$P_{\mathfrak{N}}(\xi) \leq CP_{\mathfrak{M}}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

Определение 2.1. Мультианизотропное пространство Соболева дробного порядка $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество

$$W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) := \{u : u \in L_2(\mathbb{R}^n), \sqrt{P_{\mathfrak{N}}(\xi)}F[u](\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)\},$$

наделенное нормой

$$\|u\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} P_{\mathfrak{N}}(\xi) |F[u](\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3)$$

Отметим, что если главными вершинами многогранника \mathfrak{N} являются мультииндексы $\alpha^k \in \mathbb{Z}_n^+$, то данное нами определение дробного мультианизотропного пространства совпадает с классическим определением мультианизотропного пространства Соболева для целочисленных производных:

$$W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) := \{f : f \in L_2(\mathbb{R}^n), D^{\alpha^{(k)}} f \in L_2(\mathbb{R}^n) \quad \forall k = 1, 2, \dots, M\},$$

наделенное эквивалентной к выражению (2.3) нормой

$$\|f\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \sum_{k=1}^M \|D^{\alpha^{(k)}} f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Отметим, что для любого n -мерного вполне правильного многогранника \mathfrak{N} , $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ является банаховым пространством и множество функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ (см. [11]).

§ 3. Формулировка основных результатов

Пусть $\mathfrak{N}_0 \subset \mathbb{R}^2$ вполне правильный двухмерный многогранник, $q \in (0, 1)$ некое рациональное число, s_0 и l натуральные числа, такие что $0 < s_0 < l$. Будем рассматривать трехмерный вполне правильный многогранник $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^3$, с вершиной $(0, 0, l)$ и такой, что все остальные главные вершины многогранника лежат на сечениях \mathfrak{N} плоскостями $x_3 = s_0$ и $x_3 = 0$ а сечения эти в свою очередь равны соответственно многогранникам $q\mathfrak{N}_0$ и \mathfrak{N}_0 . Нетрудно заметить, что в силу выпуклости многогранника \mathfrak{N} имеем, что

$$l \leq \frac{s_0}{1-q}. \quad (3.1)$$

Для заданного целого положительного числа $s < l$ через \mathfrak{N}_s обозначим проекцию на плоскость $x_3 = 0$ сечения многогранника \mathfrak{N} плоскостью $x_3 = s$ и положим $\mathfrak{A}_s := m_s \mathfrak{N}_s$, где

$$m_s := \begin{cases} 1 - \frac{1-q}{2(s_0 - (1-q)s)}, & \text{если } 0 \leq s < s_0, \\ 1 - \frac{1}{2(l-s)}, & \text{если } s_0 \leq s < l. \end{cases}$$

Теорема 3.1. Пусть $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ произвольная функция и $s: 0 \leq s < l$ целое число. Тогда для почти всех $a \in \mathbb{R}$ $D_{x_3}^s f|_{x_3=a} \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$ причем с некоторой постоянной $C > 0$, не зависящая от функции f и числа a , выполняется оценка

$$\|D_{x_3}^s f|_{x_3=a}\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)}.$$

Теорема 3.2. Пусть $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$, $s: 0 \leq s < l$ целое число, $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E}(a)$: множество тех $\varepsilon \in \mathbb{R}$, для которых $D_{x_3}^s f|_{x_3=a+\varepsilon} \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$. Тогда существует функция $\varphi_s \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$ такая, что выполняются следующие соотношения

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in \mathcal{E}(a)}} \|D_{x_3}^s f|_{x_3=a+\varepsilon} - \varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} = 0,$$

$$\|\varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)},$$

где $C > 0$ константа, не зависящая от функции f и числа a . Причем если $D_{x_3}^s f|_{x_3=a} \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$, то φ_s и $D_{x_3}^s f|_{x_3=a}$ совпадают.

Теорема 3.3. Для любого заданного набора функций $\varphi_s \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$, $s = 0, 1, \dots, l-1$, числа $a \in \mathbb{R}$ существует функция $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|D_{x_3}^s f|_{x_3=a+\varepsilon} - \varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} = 0,$$

$$\|f\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \sum_{s=0}^{l-1} \|\varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)},$$

где $C > 0$ константа, не зависящая от набора функций $\{\varphi_s\}$.

§ 4. Доказательство основных результатов

Замечание 4.1. В дальнейшем для простоты записи будем опускать коэффициент $1/(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ в преобразовании Фурье, так как это будет влиять лишь на константу C в формулировках теорем.

Теорема 4.1. Пусть $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ произвольная функция, $s: 0 \leq s < l$ целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq s < l$. Тогда существует $C > 0$, такое что для произвольной $a \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\|D_{x_3}^s u|_{x_3=a}\|_{W_2^{s_0}(\mathbb{R}^2)} \leq C \|u\|_{W_2^s(\mathbb{R}^3)}. \quad (4.1)$$

Доказательство. По определению нормы в пространстве $W_2^{s_0}(\mathbb{R}^2)$ имеем

$$\|D_{x_3}^s u|_{x_3=a}\|_{W_2^{s_0}(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} P_{\mathfrak{N}_s}(\xi') |F_{x'}[D_{x_3}^s u](\xi', a)|^2 d\xi', \quad (4.2)$$

где $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$. Из свойств преобразования Фурье имеем, что

$$F_{x'}[D_{x_3}^s u](\xi', x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} (i\xi_3)^s F[u](\xi', \xi_3) e^{ix_3\xi_3} d\xi_3. \quad (4.3)$$

Рассмотрим два случая. 1) Случай $0 \leq s < s_0$. Из представления (4.3) получим

$$\begin{aligned} F_{x'}[D_{x_3}^s u](\xi', a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ia\xi_3}}{\left(P_{\mathfrak{N}_s}(\xi') + P_{q\mathfrak{N}_0}(\xi')\xi_3^{2(s_0-s)}\right)^{1/2}} \\ &\quad \times (i\xi_3)^s \left(P_{\mathfrak{N}_s}(\xi') + P_{q\mathfrak{N}_0}(\xi')\xi_3^{2(s_0-s)}\right)^{1/2} \cdot F[u](\xi', \xi_3) d\xi_3. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёлдера и учитывая, что согласно лемме 2.2 с некоторой постоянной $C_1 > 0$ выполняется неравенство

$$\xi_3^{2s} (P_{\mathfrak{N}_s}(\xi') + P_{q\mathfrak{N}_0}(\xi')\xi_3^{2(s_0-s)}) \leq C_1 P_{\mathfrak{N}}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3,$$

получим

$$\begin{aligned} &|F_{x'}[D_{x_3}^s u](\xi', a)|^2 \leq \\ &C_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{P_{\mathfrak{N}_s}(\xi') + P_{q\mathfrak{N}_0}(\xi')\xi_3^{2(s_0-s)}} d\xi_3 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\mathfrak{N}}(\xi) |F[u](\xi', \xi_3)|^2 d\xi_3. \end{aligned}$$

Так как

$$q\mathfrak{N}_0 = \frac{qs_0}{s_0 - (1-q)s} \mathfrak{N}_s,$$

то в силу леммы 2.1 с некоторой константой $C_2 > 0$ имеем

$$|F_{x'}[D_{x_3}^s u](\xi', a)|^2 \leq C_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{P_{\mathfrak{N}_s}(\xi') + C_2 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{\frac{qs_0}{s_0 - (1-q)s}} \xi_3^{2(s_0-s)}} d\xi_3 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\mathfrak{N}}(\xi) |F[u](\xi', \xi_3)|^2 d\xi_3.$$

Рассмотрим первый интеграл. Так как числа s_0 и s целые и $s < s_0$, то $2(s_0 - s) > 1$ и этот интеграл сходится. Производя в нем замену переменной $\tau = P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-\frac{1-q}{2(s_0 - (1-q)s)}} \xi_3$ и учитывая эквивалентность выражений $P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')$ и $P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{m_s}$, окончательно с некоторой постоянной $C > 0$ получим

$$|F_{x'}[D_{x_3}^s u](\xi', a)|^2 \leq \frac{C}{P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\mathfrak{N}}(\xi) |F[u](\xi', \xi_3)|^2 d\xi_3. \quad (4.4)$$

Из (4.4) и (4.2) немедленно следует (4.1).

2) Случай $s_0 \leq s < l$. Доказательство проводится аналогичным образом с той разницей, что в представлении (4.3) нужно умножить и делить на выражение $(P_{\mathfrak{N}_s}(\xi') + \xi_3^{2(l-s)})^{\frac{1}{2}}$. \square

Теорема 4.2. Для произвольного набора функций $\varphi_s \in S(\mathbb{R}^2)$, $s = 0, 1, \dots, l-1$, числа $a \in \mathbb{R}$ существует функция $u \in S(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$D_{x_3}^s u|_{x_3=a} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \dots, l-1, \quad (4.5)$$

$$\|u\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \sum_{s=0}^{l-1} \|\varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{N}_s}(\mathbb{R}^2)}, \quad (4.6)$$

где $C > 0$ константа, независящая от набора функций $\{\varphi_s\}$ и числа a .

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $a = 0$. Пусть $\psi_s \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $s = 0, 1, \dots, l-1$ функции, для которых $\psi_s^{(j)}(0) = 0 \quad \forall j < l, j \neq s$ и $\psi_s^{(s)}(0) = 1$. Введем функции

$$f_s(x_1, x_2, x_3) := F_{\xi'}^{-1}[\psi_s(x_3 \cdot P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{1-m_s}) P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-s(1-m_s)} F[\varphi_s](\xi')]$$

$$s = 0, 1, \dots, l-1,$$

принадлежащих пространству $S(\mathbb{R}^3)$. Легко проверить, что функции f_s удовлетворяют следующим условиям:

$$D_{x_3}^j f_s(x)|_{x_3=0} = 0, \text{ для } \forall j < l, j \neq s$$

$$D_{x_3}^s f_s(x)|_{x_3=0} = \varphi_s(x').$$

Покажем, что существуют константы $C_s > 0$, $s = 0, 1, \dots, l-1$, такие что

$$\|f_s\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)} \leq C_s \cdot \|\varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{N}_s}(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.7)$$

Для преобразования Фурье функции f_s имеем

$$\begin{aligned} F[f_s](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\xi} F_{\xi'}^{-1}[\psi_s(x_3 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{1-m_s}) F[\varphi_s](\xi') P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-s(1-m_s)}] dx \\ &= F[\varphi_s](\xi') P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-s(1-m_s)} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_3 \xi_3} \psi_s(x_3 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{1-m_s}) dx_3. \end{aligned}$$

В последнем интеграле производя замену $\tau = x_3 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{1-m_s}$, получим

$$\begin{aligned} F[f_s](\xi) &= F[\varphi_s](\xi') P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-(s+1)(1-m_s)} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau \xi_3 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-(1-m_s)}} \psi_s(\tau) d\tau \\ &= F[\varphi_s](\xi') P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-(s+1)(1-m_s)} F[\psi_s](\xi_3 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-(1-m_s)}). \end{aligned}$$

Отсюда для $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ -нормы функции f_s получим

$$\begin{aligned} \|f_s\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} P_{\mathfrak{N}}(\xi) |F[f_s](\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^2} |F[\varphi_s](\xi')|^2 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-2(1+s)(1-m_s)} \\ &\times \left(\int_{\mathbb{R}} (P_{\mathfrak{N}_0}(\xi') + \xi_3^{2s_0} P_{\mathfrak{N}_{s_0}}(\xi') + \xi_3^{2l}) |F[\psi_s](\xi_3 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-(1-m_s)})| d\xi_3 \right) d\xi'. \end{aligned} \quad (4.8)$$

По отдельности рассмотрим следующие два случая.

1) Случай $0 \leq s < s_0$. Учитывая соотношения

$$\mathfrak{N}_0 = \frac{2s_0(1-m_s)}{1-q} \mathfrak{N}_s, \quad \mathfrak{N}_{s_0} = \frac{2qs_0(1-m_s)}{1-q} \mathfrak{N}_s$$

получим, что с некоторой постоянной $A_0 > 0$ для $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$ выполняется оценка

$$P_{\mathfrak{N}_0}(\xi') + \xi_3^{2s_0} P_{\mathfrak{N}_{s_0}}(\xi') + \xi_3^{2l}$$

$$\leq A_0 \left(P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{\frac{2s_0(1-m_s)}{1-q}} + \xi_3^{2s_0} P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{\frac{2qs_0(1-m_s)}{1-q}} + \xi_3^{2l} \right). \quad (4.9)$$

Подставляя оценку (4.9) в (4.8) и во внутреннем интеграле производя замену переменной

$$\tau = \xi_3 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-(1-m_s)}, \quad (4.10)$$

получим

$$\|f_s\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)}^2 \leq A_0 \int_{\mathbb{R}^2} |F[\varphi_s](\xi')|^2 \left(P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{q_1} \int_{\mathbb{R}} |F[\psi_s](\tau)|^2 d\tau + P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{q_2} \int_{\mathbb{R}} \tau^{2s_0} |F[\psi_s](\tau)|^2 d\tau + P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{q_3} \int_{\mathbb{R}} \tau^{2l} |F[\psi_s](\tau)|^2 d\tau \right) d\xi', \quad (4.11)$$

где показатели q_1 , q_2 , q_3 соответственно равны

$$q_1 = -2(s+1)(1-m_s) + (1-m_s) + \frac{2s_0(1-m_s)}{1-q} = m_s, \quad (4.12)$$

$$q_2 = -2(s+1)(1-m_s) + (1-m_s) + 2s_0(1-m_s) + \frac{2qs_0(1-m_s)}{1-q} = m_s, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} q_3 &= -2(s+1)(1-m_s) + (1-m_s) + 2l(1-m_s) \\ &= m_s + 2(1-m_s)(l-s) - 1 = m_s + \frac{(1-q)(l-s)}{s_0 - (1-q)s} - 1 \\ &= m_s + \frac{l-s}{\frac{s_0}{1-q} - s} - 1, \end{aligned} \quad (4.14)$$

откуда согласно (3.1)

$$q_3 \leq m_s. \quad (4.15)$$

Из (4.12)–(4.15), учитывая эквивалентность $P_{\mathfrak{N}_s}^{m_s}(\xi')$ и $P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')$, немедленно следует оценка (4.7).

2) Случай $s_0 \leq s < l$. Из определения многогранника \mathfrak{N} и его вполне правильности имеем

$$\mathfrak{N}_0 \subset \frac{l}{l-s} \mathfrak{N}_s, \quad \mathfrak{N}_{s_0} = \frac{l-s_0}{l-s} \mathfrak{N}_s. \quad (4.16)$$

В силу (4.16) с некоторой постоянной $A_1 > 0$ при $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$ имеем

$$\begin{aligned} & P_{\mathfrak{N}_0}(\xi') + \xi_3^{2s_0} P_{\mathfrak{N}_{s_0}}(\xi') + \xi_3^{2l} \\ & \leq A_1 \left(P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{\frac{l}{l-s}} + \xi_3^{2s_0} P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{\frac{l-s_0}{l-s}} + \xi_3^{2l} \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Подставляя (4.17) в (4.8) и снова производя замену переменной (4.10), получим оценку (4.11) с постоянной A_1 вместо A_0 и с показателями q_1, q_2, q_3 , где

$$\begin{aligned} q_1 &= -2(s+1)(1-m_s) + (1-m_s) + \frac{l}{l-s} = m_s \\ q_2 &= -2(s+1)(1-m_s) + (1-m_s) + 2s_0(1-m_s) + \frac{l-s_0}{l-s} = m_s \\ q_3 &= -2(s+1)(1-m_s) + (1-m_s) + 2l(1-m_s) = m_s. \end{aligned}$$

Так как $q_1 = q_2 = q_3 = m_s$, то как и в случае 1) вытекает выполнение оценки (4.7) с постоянной $C_s > 0$.

Нетрудно проверить, что функция $u(x) := \sum_{s=0}^{l-1} f_s(x)$ удовлетворяет соотношениям (4.5), (4.6) с константой $C = \max_{0 \leq s < l} C_s$. \square

Доказательство теорем 3.1–3.3 проводится аналогичным образом как это сделано в работе [11] используя теоремы 4.1 и 4.2.

Список литературы

1. *Соболев С.Л. Применения функционального анализа в математической физике // Наука, Москва. 1988.*
2. *Демиденко Г.В. Пространства Соболева и обобщенные решения // Новосибир. Гос. Унив., Новосибирск. 2015.*
3. *Слободецкий Л.Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Уч. зап. Ленингр. Гос. Пед. Инст. 1958. Т. 197. С. 54-112.*
4. *Ghazaryan H.G. The Newton polyhedron, spaces of differentiable functions and general theory of differential equations // Arm. J. Math.. 2017. V. 9, N 2. P. 102-145.*
5. *Карапетян Г.А. Интегральное представление и теоремы вложения для n -мерных мультианизотропных пространств с одной вершиной анизотропности // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 573-590.*

6. Karapetyan G.A. Integral representations of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces on the plane with one anisotropy vertex // *J. Contemp. Math. Anal.* 2016. V. 51, N 6. P. 269-281.
7. Karapetyan G.A., Arakelyan M.K. Estimation of multianisotropic kernels and their application to the embedding theorems // *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* 2017. V. 171, N 1. P. 48-56.
8. Karapetyan G.A., Petrosyan H.A. Embedding theorems for multianisotropic spaces with two vertices of anisotropy // *Proc. YSU A: Phys. Math. Sci.* 2017. V. 51, N 1. P. 29-37.
9. Karapetyan G. A. An integral representation and embedding theorems in the plane for multianisotropic spaces // *J. Contemp. Math. Anal.* 2017. V. 52, N 6. P. 267-275.
10. Karapetyan G.A., Arakelyan M.K. Embedding theorems for general multianisotropic spaces // *Math. Notes.* 2018. V. 104, N 3. P. 422-438.
11. Хачатурян М.А., Акопян А.Р. О следах функций из мультианизотропных пространств Соболева // *Вест. Русск-Арм. Унив., Физ.-Мат. и Ест. Науки.* 2021. Т. 1. С. 56-77.

References

1. Sobolev S.L. *Some applications of functional analysis in mathematical physics* // Nauka, Moscow. 1988.
2. Demidenko G.V. *Sobolev spaces and generalized solutions* // Novosibirsk State Univ., Novosibirsk. 2015.
3. Slobodecki L.N. Generalized Sobolev spaces and their application to boundary problems for partial differential equations // *Uch. Zap. Leningr. Gos. Ped. Inst.* 1958. V. 197, P. 54-112.
4. Ghazaryan H.G. The Newton polyhedron, spaces of differentiable functions and general theory of differential equations // *Arm. J. Math.* 2017. V. 9, N 2. P. 102-145.
5. Karapetyan G.A. Integral representation and embedding theorems for n -dimensional multianisotropic spaces with one anisotropy vertex // *Sib. Matem. J.* 2017. V. 58, N 3. P. 573-590.

6. Karapetyan G.A. Integral representations of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces on the plane with one anisotropy vertex // *J. Contemp. Math. Anal.* 2016. V. 51, N 6. P. 269-281.
7. Karapetyan G.A., Arakelyan M.K. Estimation of multianisotropic kernels and their application to the embedding theorems // *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* 2017. V. 171, N 1. P. 48-56.
8. Karapetyan G.A., Petrosyan H.A. Embedding theorems for multianisotropic spaces with two vertices of anisotropy // *Proc. YSU A: Phys. Math. Sci.* 2017. V. 51, N 1. P. 29-37.
9. Karapetyan G. A. An integral representation and embedding theorems in the plane for multianisotropic spaces // *J. Contemp. Math. Anal.* 2017. V. 52, N 6. P. 267-275.
10. Karapetyan G.A., Arakelyan M.K. Embedding theorems for general multianisotropic spaces // *Math. Notes.* 2018. V. 104, N 3. P. 422-438.
11. Khachaturyan M.A., Akopyan A.R. On the traces of functions from multianisotropic Sobolev spaces // *Vestn. Russk.-Arm. Univ., Fiz.-Mat. Est. Nauki.* 2021. N 1, P. 56-77.

Информация об авторе

Микаел Артурович Хачатурян, аспирант, старший преподаватель

Scopus Author ID 57208499055

Author Information

Michael A. Khachaturyan, Graduate Student, Senior Lecturer

Scopus Author ID 57208499055

*Статья поступила в редакцию 17.10.2023;
одобрена после рецензирования 13.04.2023; принята к публикации
17.05.2024*

*The article was submitted 17.10.2023;
approved after reviewing 13.04.2023; accepted for publication 17.05.2024*

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 144-155
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 144-155